Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА:

интегральное исчисление, дифференциальные уравнения, ряды

ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО
для студентов экономических специальностей вуза

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2012

УДК 512 : 514.123.1(076)
ББК 22.1 я73
В 937

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук А. И. Рябченко;
кафедра алгебры и геометрии УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

В 937 **Высшая математика: интегральное исчисление, дифференциальные уравнения, ряды** : практическое руководство / А. В. Бузланов, Е. Н. Бородич, Р. В. Бородич, Т. В. Бородич; М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2011. – 51 с.
ISBN 978-985-439-591-3

В практическом руководстве рассматриваются теоретические проблемы алгебры и аналитической геометрии на плоскости : уравнение прямой на плоскости, матрицы, определители, системы линейных уравнений, векторы. Даются примеры, задания, вопросы для самостоятельного изучения и самоконтроля.

Адресовано студентам экономических специальностей вуза.

УДК 512 : 514.123.1(076)
ББК 22.1 я73

ISBN 978-985-439-591-3

Содержание

1.Неопределённый интеграл и его свойства

1.1 Понятие о первообразной функции

Определение 1.1. Функция $F(x)$, определённая в промежутке $(a; b)$, называется **первообразной данной функции** $f(x)$ в этом промежутке, если для любого значения $x \in (a; b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Пример 1.1.

1. $F(x) = \sin x$ является первообразной функции $f(x) = \cos x$.

2. $F(x) = x^3$ является первообразной для функции $f(x) = 3x^2$.

Теорема 1.1. Если $F(x)$ ─ первообразная функции $f(x)$, то множество $\{F(x) + C \mid C$ ─ произвольная постоянная$\}$ есть множество всех первообразных функции $f(x)$.

1.2 Неопределенный интеграл и его свойства

Определение 1.2. Если функция $F(x)$ ─ первообразная функции $f(x)$, то множество всех функций $F(x) + C$, где C ─ произвольная постоянная, называется **неопределённым интегралом** от функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

При этом функция $f(x)$ называется **подинтегральной функцией,** $f(x)dx$ ─ **подинтегральным выражением.** Операция нахождения неопределённого интеграла называется также **интегрированием.**

Свойство 1.1. Производная неопределённого интеграла равна подинтегральной функции; дифференциал от неопределённого интеграла равен подинтегральному выражению, т. е.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x); \quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

Свойство 1.2. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого, т. е.

$$\int d(\varphi(x)) = \varphi(x) + C.$$

Свойство 1.3. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределённого интеграла, т. е.

$$\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx \quad (k = \text{const},\ k\neq 0).$$

Свойство 1.4. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные, то функция $f_1(x) + f_2(x)$ также имеет первообразную, причём

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

Свойство 1.5. Если функции $f_1(x), f_2(x),\ldots, f_n(x)$ имеют первообразные, то функция $f_1(x) + f_2(x) +\ldots+ f_n(x)$ также имеет первообразную, причём

$$\int (f_1(x) +\ldots+ f_n(x))dx = \int f_1(x)dx + \ldots +\int f_n(x)dx..$$

1.3 Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$,

2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, ($\alpha > 0$),

3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$,

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ell n a} + C$, ($a > 0$),   В частности, $\int e^x dx = e^x + C$,

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$,

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$,

7. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + C$,

8. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg} x + C$,

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$,

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} dx = \mathrm{arctg} x + C = -\mathrm{arcctg} x + C$.

Замечание. Формулы этой таблицы остаются справедливыми и в случае, когда вместо x поставить некоторую дифференцируемую функцию u = u(x), т. е. можно записать **обобщённую таблицу** простейших неопределённых интегралов: **1.** $\int du = u + C$, **2.** $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq 1$)

1.4 Основные методы интегрирования

К числу важных методов интегрирования относятся методы: непосредственного интегрирования; замены переменной; интегрирования по частям.

Метод непосредственного интегрирования основан на свойстве 1.4 неопределённого интеграла и использует таблицу основных неопределённых интегралов.

Пример 1.2. $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx - \int x^{-2} dx = \ell n|x| + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} + C.$

Пример 1.3. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \left(\dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sin^2 x}\right) dx =$

$= \int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx + \int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = \mathrm{tg} x - \mathrm{ctg} x + C.$

Метод замены переменной (или **метод подстановки**) основан на следующей теореме.

Теорема 1.2. Если F(x) ─ первообразная функции f(x), а x = φ(t) – дифференцируемая функция f(φ(t))φ'(t) также имеет первообразную, причём

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Доказательство. По правилу дифференцирования сложной функции

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

т. е. функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ имеет в качестве одной из своих первообразных функцию $F(\varphi(t))$. Следовательно,

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Поскольку

$$F(\varphi(t)) + C = F(x) + C = \int f(x)dx,$$

то

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1.1)$$

По формуле (1.1) осуществляется замена переменной в неопределённом интеграле.

Пример 1.4. $\int \sin(2 - 3x)dx = [2 - 3x = t,\ d(2 - 3x) = dt,\ -3dx = dt,\ dx = -\frac{1}{3}dt] =$

$= \int \sin t(-\frac{1}{3}dt) = = -\frac{1}{3}\int \sin t dt = \frac{1}{3}\cos t + C = \frac{1}{3}\cos(2 - 3x) + C.$

Пример 1.5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ **=[** $\sqrt{x^2+a} = t - x$ – подстановка Эйлера, $t = x + \sqrt{x^2+a}$ **,**

$dt = (1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+a}})dx,\ dt = \frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}dx,\ dt = \frac{t}{\sqrt{x^2+a}}dx,\ \frac{dt}{t}$ **=** $\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ **]** $= \int \frac{dt}{t} =$

$= \ell n\,|\,t\,| + c = \ell n\,|\,x + \sqrt{x^2+a}\,| + c.$

Метод интегрирования по частям основан на следующей формуле

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu\ ,$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ — некоторые дифференцируемые функции.

Пример 1.6. $\int x\sin 2x dx = [u=\mathrm{arctg}x,\ dx=dv,\ du = (\mathrm{arctg}x)'dx,\ du = \frac{1}{1+x^2}dx,$

$v = x] = x\,\mathrm{arctg}x - \int \frac{x}{1+x^2}dx$. Вычисляем последний интеграл $\int\frac{x}{1+x^2}dx =$

$[t = 1 + x^2,\ dt = 2xdx,\ xdx = \frac{1}{2}dt] = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\ell n\,|\,t\,| + C = \frac{1}{2}\ell n\,|\,1+x^2\,| + C.$

Теперь $\int \mathrm{arctg}x dx = x\ \mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\ell n\,|\,1+x^2\,| + C.$

Пример 1.7. $\int e^x \cos x dx = [u = e^x,\ dv = \cos x dx,\ du = e^x dx,\ v = \int \cos x dx = \sin x] =$
$= e^x\sin x - \int e^x \sin x dx = [e^x = u,\ dv = \sin x dx,\ du = e^x dx,\ v = -\cos x] = e^x\sin x +$
$+ e^x\cos x - \int \cos x \cdot e^x\, dx.$

Итак, $\int e^x \cdot\cos x dx = e^x(\sin x + \cos x) - \int \cos x \cdot e^x\, dx.$

$2\int \cos x \cdot e^x\, dx = e^x(\sin x + \cos x),$

$\int \cos x \cdot e^x\, dx = \frac{1}{2}\ e^x(\sin x + \cos x) + C.$

Вопросы для самоконтроля

1. Какая функция называется первообразной?
2. Что называется неопределенным интегралом от данной функции?
3. Каковы основные свойства неопределенного интеграла?
4. Назовите основные табличные интегралы.
5. В чем сущность метода непосредственного интегрирования?
6. В чем заключается метод замены переменной (метод подстановки)?
7. В чем заключается метод интегрирования по части?

2 Определённый интеграл и его приложения

2.1 Понятие определенного интеграла

2.1.1 Задачи о площади криволинейной трапеции

Рассмотрим **криволинейную трапецию** $aABb$ (рисунок 2.1), т. е. плоскую фигуру, ограниченную сверху графиком функции $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$), слева и справа — отрезками aA и bB прямых $x = a, x = b$, снизу – осью Ox.

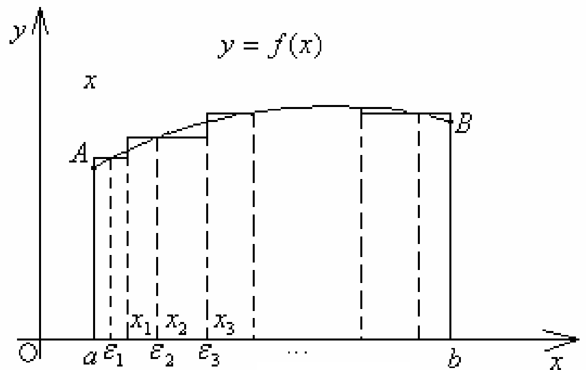

Рис.2.1.

Отрезок $[a;b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ разобьём на n элементарных отрезков $[a;x_1]$, $[x_1;x_2]$, …, $[x_{n-1};b]$, длины которых обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ для k = 1,2,…,n. В каждом элементарном отрезке $[x_{k-1};x_k]$ выберем произвольную точку ξ_k и вычислим в ней значение данной функции f(ξ_k). Произведение f(ξ_k)Δx_k выражает площадь прямоугольника с основанием Δx_k и высотой f(ξ_k).

Составим сумму всех таких произведений

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k . \qquad (2.1)$$

Эта сумма называется **интегральной суммой** для функции $y = f(x)$ на $[a;b]$ и выражает площадь ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников и приближённо заменяющей данную трапецию. Очевидно, что сумма S_k зависит от способа разбиения и выбора точек ξ_k.

Обозначим через λ длину наибольшего из элементарных отрезков $[x_{k-1};x_k]$, k = 1,2,…,n, т.е. λ = maxΔx_k. Число S, вычисляемое по формуле

$$S = \lim_{\lambda \to 0} S_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k ,$$

называется **площадью криволинейной трапеции.**

2.1.2 Определенный интеграл

Пусть дана функция $y = f(x)$, определённая на $[a;b]$, где $a<b$. Отрезок $[a;b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ разобьём на n элементарных отрезков $[a;x_1]$, $[x_1;x_2]$, …, $[x_{n-1};b]$, длины которых обозначим через Δx_k, т. е. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, k = 1,2,…,n. В каждом из элементарных отрезков $[x_{k-1};x_k]$ выберем произвольно одну точку ξ_k, значение функции f(ξ_k) умножим на длину отрезка Δx_k и составим сумму всех таких произведений

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \tag{2.2}$$

Сумма (2.2) называется **интегральной суммой** для функции $y = f(x)$ на $[a;b]$.

Обозначим через λ длину наибольшего из элементарных отрезков $[x_{k-1};x_k]$, т. е. $\lambda = \max \Delta x_k$, k = 1,2,…,n.

Определение 2.1. Определённым интегралом от функции $y = f(x)$ на $[a;b]$ называется, конечный предел её интегральной суммы, когда число элементарных отрезков неограниченно возрастает, а длина наибольшего из них стремится к нулю.

Обозначается: $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – называется **подинтегральной функцией**, x – **переменной интегрирования**, a — **нижним пределом интегрирования**, b – **верхним пределом интегрирования.**

Следовательно, по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \tag{2.3}$$

Из определения следует, что величина определённого интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \ldots = \int_a^b f(u)du .$$

Функция, для которой существует предел (2.3), называется **интегрируемой** на $[a;b]$.

Геометрический смысл определённого интеграла состоит в том, что если $a<b$ и f(x) ≥ 0, то определённый интеграл от функции $y = f(x)$ по отрезку $[a;b]$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, слева и справа прямыми $x = a, x = b$, снизу – осью Ox.

2.1.3 Свойства определенного интеграла

Свойство 2.1. По определению полагаем

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Свойство 2.2. При перестановке пределов интегрирования определённый интеграл меняет знак на противоположный, т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Свойство 2.3. Свойство аддитивности.
Если промежуток интегрирования $[a;b]$ разбит на конечное число отрезков $[a;c_1]$, $[c_1;c_2]$, …, $[c_{n-1};b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \ldots + \int_{c_{n-1}}^b f(x)dx.$$

Свойство 2.4. Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла, т. е. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

Свойство 2.5. Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа интегрируемых функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, $\int_a^b \big(f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)\big)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)dx$.

Свойство 2.6. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, где $a<b$, и $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Свойство 2.7. Если функции $f(x)$, $\varphi(\text{x})$ интегрируемы на $[a;b]$, где $a<b$, и $f(x) \leq \varphi(\text{x})$ для всех $x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$.

Свойство 2.8. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, где $a<b$, то функция $|\, f(x) \,|$ также интегрируема на $[a;b]$, причём

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

2.2 Основные теоремы об определенном интеграле

2.2.1 Теорема об оценке определенного интеграла

Теорема 2.1. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, где $a<b$, и для всех $x \in [a;b]$ выполняется неравенство $\mathrm{m} \leq f(x) \leq \mathrm{M}$,

То
$$\mathrm{m}(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \mathrm{M}(b-a). \tag{2.4}$$

Неравенство (2.4) позволяет оценить определённый интеграл, т. е. указать границы, между которыми заключено его значение.

Пример 2.1. Оценить определённый интеграл $\int_0^{\pi}(3+\sin^6 x)dx$.

В данном случае $a=0, b=\pi, b-a=\pi$. Так как 3 $\leq$ 3+$\sin^6 x$ $\leq$4,

то 3π $\leq \int_0^{\pi}(3+\sin^6 x)dx \leq$ 4π.

2.2.2. Теорема о среднем

Теорема 2.2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то на этом отрезке существует точка c такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a). \tag{2.5}$$

Формула (2.5) называется **формулой среднего значения.**

2.2.3 Определенный интеграл с переменным верхним пределом, его свойства

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, интегрируемую на $[a;b]$. Если $x\in[a;b]$, то функция f(x) интегрируема также на любом отрезке $[a;x]$. Предположим, что x меняется на $[a;b]$, тогда на этом интеграле определена функция

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

где t – переменная интегрирования, x – переменный верхний предел.

Эту функцию называют **определённым интегралом с переменным верхним пределом.**

Свойство 2.9. Определённый интеграл с переменным верхним пределом является непрерывной на $[a;b]$ функцией.

Свойство 2.10. Если подинтегральная функция $f(x)$ непрерывна, то производная определённого интеграла с переменным верхним пределом существует и равна значению подинтегральной функции для этого предела интегрирования, т. е.

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = \text{f(x)}.$$

Следствие 2.1. Определённый интеграл с переменным верхним пределом является одной из первообразных для непрерывной подинтегральной функцией, т. е. для любой непрерывной функции существует производная.

Связь между определённым и неопределённым интегралами выражает следующая теорема.

2.2.4 Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 2.3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда, если функция F(x) является некоторой её первообразной на этом отрезке, то справедлива следующая формула

$$\int_a^b f(x)dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a). \qquad (2.6)$$

Эта формула называется **формулой Ньютона-Лейбница.**

Формула (2.6) не только устанавливает связь между определённым и неопределённым интегралами, но и даёт простой метод вычисления определённого интеграла.

Пример 2.2. $\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$.

2.3 Основные методы интегрирования

К таким относятся методы: замены переменной; интегрирования по частям.

Теорема 2.4. (о замене переменной в определённом интеграле).

Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a;b]$. Тогда если: 1) функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема на $[\alpha;\beta]$ и $\varphi'(t)$ непрерывна на $[\alpha;\beta]$; 2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ является отрезок $[a;b]$; 3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt. \qquad (2.7)$$

Формула (2.7) называется **формулой замены переменной или подстановки в определённом интеграле.**

Замечание 2.1. Если при вычислении неопределённого интеграла с помощью замены переменной мы возвращались от новой переменной к старой, то при замене переменной в определённом интеграле делать этого не надо.

Пример 2.3. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx =$

$= \left[t = \sqrt{x+1}, x = t^2 - 1, dx = 2tdt; при\ \ x = 0, t = 1, при\ \ x = 3, t = 2, т.е.\ \alpha = 1, \beta = 2\right] =$

$= \int_1^2 \frac{t^2 - 1}{t} \cdot 2tdt = 2\int_1^2 \left(t^2 - 1\right)dt = 2 \cdot \left.\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\right|_1^2 = 2 \cdot \left(\frac{8}{3} - 2\right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{8}{3}.$

Теорема 2.5. (об интегрировании по частям в определённом интеграле).

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны вместе со своими производными $u'(x)$ и $v'(x)$ на $[a;b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b udv = \left.uv\right|_a^b - \int_a^b vdu. \qquad (2.8)$$

Формула (2.8) называется **формулой интегрирования по частям в определённом интеграле.**

Пример 2.4. $\int_1^e \ell nx dx = \left[u = \ell nx, dv = dx, du = \frac{1}{x}dx, v = \int dx = x \right] =$

$$= (\ell nx \cdot x)\Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = (e-0) - x\Big|_1^e = e - (e-1) = 1.$$

2.4 Приложение определенного интеграла

2.4.1 Площадь криволинейной трапеции

Определённый интеграл от неотрицательной непрерывной функции $f(x)$ на $[a;b]$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, слева и справа прямыми $x = a, x = b$, снизу – осью Ox.

Пример 2.5. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2$, прямой $x = 1$ и осью Ox (Рисунок 2.2.).

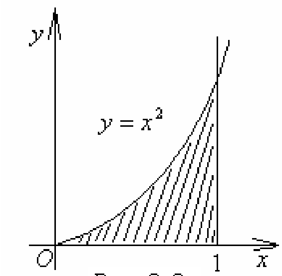

Рис.2.2.

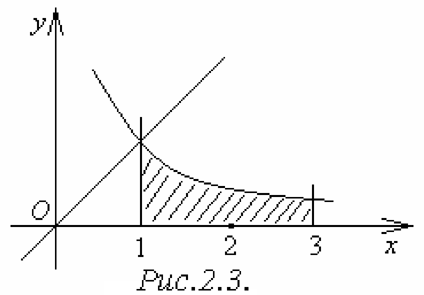

Рис.2.3.

Решение. $S = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$

Более сложные задачи на вычисление площадей, решают, используя свойство аддитивности площади: можно разбить фигуру на непересекающиеся криволинейные трапеции и вычислить площадь всей фигуры как сумму площадей этих частей.

Пример 2.6. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x, y = \frac{1}{x^2}, y = 0, x = 3$ (Рисунок 2.3.).

Решение. $S = S_1 + S_2 = \int_0^1 x dx + \int_1^3 \frac{1}{x^2} dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^3 = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{7}{6}.$

Если на $[a;b]$ заданы две непрерывные функции $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, причём при всех значениях $x \in [a;b]$ верно $y_1 \le y_2$; то площадь фигуры, ограниченной сверху графиком функции $y_2 = f_2(x)$, снизу – графиком функции $y_1 = f_1(x)$, слева и справа – прямыми $x = a$, $x = b$, вычисляется по формуле $S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$.

Пример 2.7. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x$ и $y = 2 - x^2$ (Рисунок 2.4.).

Решение. Найдём точки пересечения графиков данных функций:

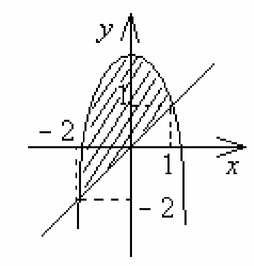

Рис.2.4.

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$$

$2 - x^2 = x,\ x^2 + x - 2 = 0,\ x_1 = -2, x_2 = 1$.

$A(-2;-2)$, $B(1;1)$.

Тогда $S = \int\limits_{-2}^{1} \left(2 - x^2 - x\right)dx =$

$$= \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - 1\right) = 4\frac{1}{2}.$$

2.4.2 Длина дуги кривой

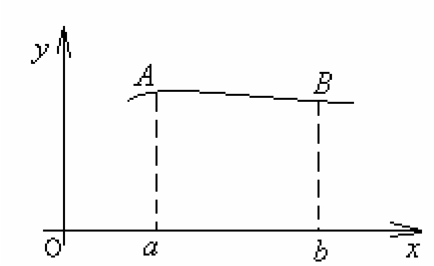

Рис.2.5.

Пусть плоская кривая задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$– непрерывная на $[a;b]$ функция. Если производная $f'(x)$ также непрерывна на $[a;b]$, то длина дуги AB данной кривой (Рисунок 2.5.) вычисляется по формуле

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

Пример 2.8. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y = x^{\frac{3}{2}}$ от $x = 0$ до $x = 5$ (Рисунок 2.6.).

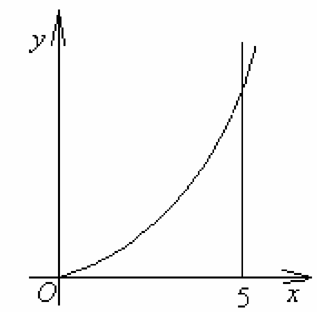

Рис.2.6.

Решение. Найдём $y'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. Тогда

$$L = \int\limits_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}dx = \int\limits_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx = \left[1 + \frac{9}{4}x = t,\ \frac{9}{4}dx = dt, dx = \frac{4}{6}dt,\right.$$

$$\left.\text{при } x = 0\ \ t = 1, \text{ при } x = 5\ \ t = \frac{49}{4}\right] = \int\limits_1^{49/4} \sqrt{t} \cdot \frac{4}{9}dt = \frac{4}{9} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)}\Bigg|_1^{\frac{49}{4}} =$$

$$= \frac{8}{27} \cdot \left(\left(\frac{49}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{8}{27} \cdot \left(\left(\frac{7}{2}\right)^3 - 1\right) = \frac{8}{27} \cdot \left(\frac{343}{8} - 1\right) = \frac{335}{27}.$$

2.4.3 Площадь поверхности вращения

Пусть кривая AB задана уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$, и пусть функция

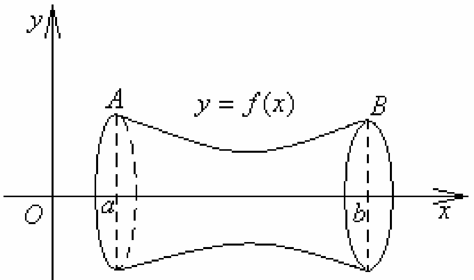

Рис.2.7.

$y = f(x)$ неотрицательна и непрерывна вместе со своей первой производной на $[a;b]$. Тогда поверхность, образованная вращением кривой AB вокруг оси Ox (Рисунок 2.7.), имеет площадь S, которая может быть вычислена по формуле:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

Если же поверхность получается вращением кривой AB, заданной уравнением $x = \varphi(y)$, $c \le y \le d$, вокруг оси Oy, то площадь такой поверхности вычисляется по формуле $S = 2\pi \int_c^d \varphi(y)\sqrt{1 + \varphi'^2(y)}dy$.

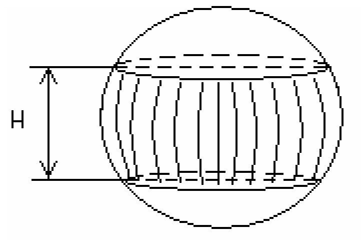

Рис.2.8.

Пример 2.9. Часть сферы, вырезаемая двумя параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии H друг от друга, называется **шаровым поясом высоты** H. Вычислить площадь шарового пояса высоты H, если радиус шара равен R (Рисунок 2.8.).

Решение. Поверхность шарового пояса можно рассматривать как поверхность, полученную при вращении дуги

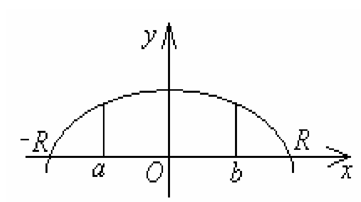

Рис.2.9.

окружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, где $a \le x \le b$, $b - a = H$, вокруг оси Ox (Рисунок 2.9.). Так как $y'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, то

$$1 + y'^2(x) = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2}.$$

Тогда $S = 2\pi \int_a^b \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \dfrac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}dx = 2\pi \int_a^b Rdx = 2\pi R(b - a) = 2\pi RH$. В частности, если $H = 2R$, то получаем площадь поверхности сферы $S = 4\pi R^2$.

2.4.4 Объём тела

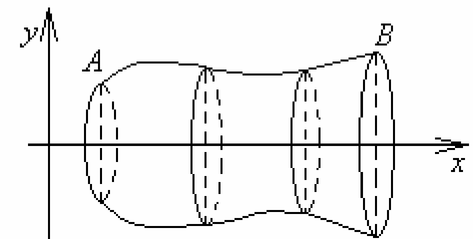

Рис.2.10.

Рассмотрим некоторое тело и вычислим его объём V. Допустим, что известны площади сечений этого тела плоскостями, перпендикулярными оси Ox. С изменением x меняется и площадь сечения, т.е. площадь сечения является некоторой функцией $S = S(x)$. Если эта функция непрерывна на

$[a;b]$, то объём тела $V = \int\limits_a^b S(x)dx$.

В частности, если тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной сверху дугой AB непрерывной линии $y = f(x)$, где $a \le x \le b$ (Рисунок 2.10.), то $S(x) = \pi(f(x))^2$ и получаем формулу $V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$.

Если же тело получено вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной дугой CD линии $x = \varphi(y)$, $c \le y \le d$, то его объём

$$V = \pi\int\limits_c^d (\varphi(y))^2 dy.$$

Пример 2.10. Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линиями $xy = 6$, $x = 1$, $x = 6$ (Рисунок 2.11.).

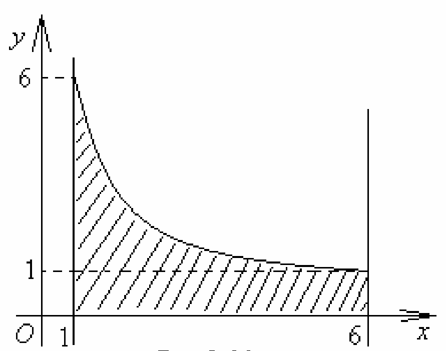

Рис.2.11.

Решение.

$$V = \pi\int\limits_1^6 y^2 dx = \pi\int\limits_1^6 \frac{36}{x^2}dx =$$

$$= \pi\left(-\frac{36}{x}\right)\Bigg|_1^6 = = \pi\left(-\frac{36}{6} + 36\right) = 30\pi.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Укажите задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
2. Что называется определенным интегралом от данной функции на данном отрезке?
3. Каков геометрический смысл определенного интеграла от данной функции y = f(x) на отрезке [a, b] в системе декартовых координат?
4. Сформулируйте простейшие свойства определенного интеграла.
5. Сформулируйте теорему о среднем в интегральном исчислении.
6. В чем заключается теорема об оценке определенного интеграла.
7. Чему равна производная от интеграла по его верхнему пределу?
8. Напишите формулу Ньютона — Лейбница.
9. В чем состоит метод замены переменной (метод подстановки) в определенном интеграле?
10. В чем состоит метод интегрирования по частям в определенном интеграле?
11. Как вычисляется площадь плоской фигуры в системе прямоугольных координат?

12. Как вычисляется длина дуги в прямоугольной системе координат?

13. Напишите формулу для вычисления площади поверхности вращения.

14. Напишите формулу для вычисления объема тела.

3 Несобственные интегралы

3.1 Интегралы с бесконечными пределами (несобственные интегралы первого рода)

При введении понятия определённого интеграла предполагалось, что выполняются условия: 1) пределы интегрирования a и b являются конечными; 2) подынтегральная функция $f(x)$ ограничена на $[a;b]$. В этом случае определённый интеграл называют **собственным.** Если хотя бы одно из двух указанных условий не выполняется, то интеграл называют **несобственным.**

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна при любом $x \geq a$. Рассмотрим определённый интеграл с переменным верхним пределом

$$\Phi(b)=\int_a^b f(x)dx .$$

Предположим, что при $b \to +\infty$ функция $\Phi(b)$ имеет конечный предел; этот предел называется **сходящимся несобственным интегралом** от функции $f(x)$ по промежутку $[a;+\infty)$ и обозначается

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx .$$

Если же этот предел не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл называется **расходящимся.**

Геометрически несобственный интеграл от неотрицательной функции выражает площадь бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y=f(x)$, слева – прямой $x=a$, снизу – осью Ox (В случае сходящегося интеграла эта площадь является конечной, в случае расходящегося – бесконечной) (Рисунок 3.1.).

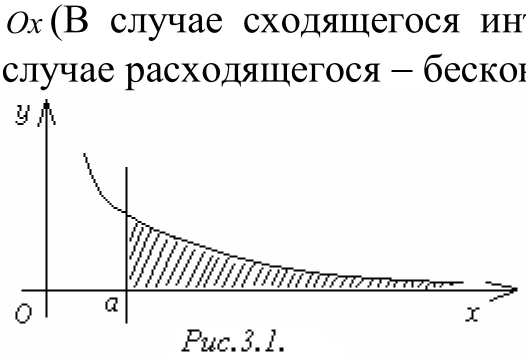

Рис.3.1.

Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} [F(b)-F(a)] =$$

$=F(+\infty)-F(a)$, где $F(+\infty)= \lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$.

и несобственный интеграл с обоими бесконечными пределами

$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ и несобственный интеграл с обоими бесконечными пределами $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$, где с – любая точка из интервала $(-\infty;+\infty)$.

Пример 3.1. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} \left(arctgx \Big|_{0}^{b} \right) = \lim\limits_{b\to+\infty} arctgb - arctg0 = \frac{\pi}{2}$.

Пример 3.2. $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \cos x dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \left(\sin x \Big|_{0}^{b} \right) = \lim\limits_{b\to+\infty} \sin b - \sin 0 = \lim\limits_{b\to+\infty} \sin b$. Этот предел не существует, следовательно, интеграл расходится.

Пример 3.3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx + \int\limits_{0}^{+\infty} e^x dx$. Этот интеграл расходится, так как $\int\limits_{0}^{+\infty} e^x dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} e^x dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \left(e^x \Big|_{0}^{b} \right) = \lim\limits_{b\to+\infty} \left(e^b - 1\right) = \infty$.

С помощью следующих двух теорем можно исследовать вопрос о сходимости некоторых несобственных интегралов.

Теорема 3.1. Если при $x \ge a$ выполнены неравенства $0 \le \varphi(x) \le f(x)$ и $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и $\int\limits_{a}^{\infty} \varphi(x)dx$, причём $\int\limits_{a}^{\infty} \varphi(x)dx \le \int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$; если же $\int\limits_{a}^{\infty} \varphi(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$.

Теорема 3.2. Если в промежутке $[a;+\infty)$ функция $y = f(x)$ меняет знак и $\int\limits_{a}^{\infty} |f(x)|dx$ сходится, то сходится также $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$.

3.2 Интегралы от неограниченных функций (несобственные интегралы второго рода)

Если функция $y = f(x)$ не ограничена в окрестности точки с отрезка $[a;b]$ и непрерывна при $a \le x < c$ и $c < x \le b$, то несобственный интеграл от этой функции определяется формулой

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0} \int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim\limits_{\eta\to0} \int\limits_{c+\eta}^{b} f(x)dx, \quad \text{где } \varepsilon > 0, \eta > 0 \tag{3.1}$$

В случае, когда $c = b$ или $c = a$, получаем

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx \tag{3.2}$$

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\eta\to0} \int\limits_{a+\eta}^{b} f(x)dx \tag{3.3}$$

Несобственный интеграл (3.2) или (3.3) называется **сходящимся,** если существует конечный предел соответствующего определённого интеграла; в противном случае интеграл называется **расходящимся.** Несобственный интеграл (3.1) называется **сходящимся**, если существуют и конечны оба предела в правой части.

Для интегралов от неограниченных функций справедливы теоремы, аналогичные теоремам 3.1. и 3.2.

Пример 3.4. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha > 0 -$ некоторое число.

1) Если $\alpha \neq 1$,то $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_\varepsilon^1 \right) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) =$

$$= \begin{cases} \infty, при & \alpha > 0 \\ \frac{1}{1-\alpha}, при & 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

2) Если $\alpha = 1$, то $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\ln x \Big|_\varepsilon^1 \right) = \lim_{\varepsilon \to 0+} (-\ln \varepsilon) = \infty$.

Таким образом, данный интеграл сходится при $0 < \alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какой интеграл называется несобственным?
2. Какой интеграл называется несобственным интегралом первого рода? Приведите примеры.
3. В каком случае несобственный интеграл первого рода сходится (расходится)?
4. Какой интеграл называется несобственным интегралом второго рода? Приведите примеры.
5. В каком случае несобственный интеграл второго рода сходится (расходится)?

4 Функции нескольких переменных

4.1 Функции нескольких переменных

Функции одной независимой переменной не охватывают все зависимости, существующие в природе. Поэтому естественно расширить известное понятие функциональной зависимости и ввести понятие функции нескольких переменных.

Определение 4.1. Пусть имеется n переменных величин, и каждому набору их значений $(x_1, x_2, ..., x_n)$ из некоторого множества X соответствует одно вполне определённое значение переменной величины z. Тогда говорят, что задана функция нескольких переменных z = $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Пример 4.1. Формула V = πR^2H задаёт объём цилиндра V как функцию двух переменных V(R;H), где R − радиус основания, H − высота цилиндра.

Переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ называются независимыми переменными или аргументами, z **зависимой переменной,** а символ f означает закон соответствия. Множество X называется **областью определения функции.**

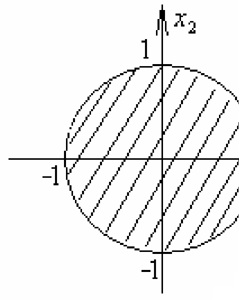

Рис.4.1.

Пример 4.2. Область определения функции z = $\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ задаётся условием $1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$ или $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$. Эта область представляет собой единичный круг с центром в начале координат и радиусом 1 (рисунок 4.1).

Рассмотрим некоторые примеры функции нескольких переменных:

1. Функция z = $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$, где $a_1 + a_2 + ... + a_n$, b − постоянные числа, называется **линейной.**

2. Функция z = $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j$, где b_{ij} − постоянные числа, называется **квадратической.**

3. Одно из базовых понятий экономической теории − **функция полезности.** Эта функция z = $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, выражающая полезность от n приобретённых товаров $x_1, x_2, ..., x_n$. Чаще всего встречаются следующие её виды:

а) z = $\sum_{i=1}^{n} a_i \ell n(x_i - e_i)$, где $a_i > 0$, $x_i > e_i \geq 0$, − **логарифмическая функция;**

б) z = $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1 - b_i}(x_i - e_i)^{1-b_i}$, где $a_i > 0$, $0 < b_i < 1$, $x_i > e_i \geq 0$ − **функция постоянной эластичности.**

4. Также часто в экономике встречается понятие **производственной функции**, выражающей результат производственной деятельности от обусловивших его факторов. Например, при n = 2 для величины общественного продукта z = $b_0x_1^{b_1}x_2^{b_2}$, где x_1 − затраты труда, x_2 − объём производственных фондов, b_0, b_1, b_2 − постоянные числа.

В дальнейшем будем вести изложение для функции двух переменных (n = 2). При этом, практически все понятия и теоремы, сформулированные для n = 2, легко переносятся и на случай n > 2 кроме того, рассмотрения двух переменных позволяет использовать наглядную иллюстрацию.

4.2 Предел и непрерывность функции нескольких переменных

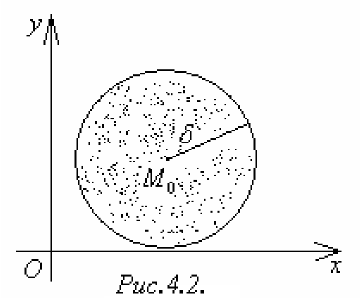

Рис.4.2.

Определение 4.2. Множество всех точек M(x; y), координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$, называется $\delta-$ **окрестностью** точки $M_0(x_0;\, y_0)$ − это всё внутренние точки круга с центром M_0 и радиусом δ (рисунок 4.2).

Определение 4.3. Пусть функция z = $f(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$, кроме быть может, самой этой точки. Число A называется **пределом функции** z = $f(x;y)$ при $x\to x_0$ и $y\to y_0$ (или, что то же самое, при $M(x;\, y)\to M_0(x_0;\, y_0)$), если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех $x\neq x_0$ и $y\neq y_0$ из $\delta-$окрестности точки M_0, выполняется неравенство $|f(x;y)-A|<\varepsilon$. Записывают:

$$A=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) \quad \text{или} \quad A=\lim_{M\to M_0} f(M).$$

Пример 4.3. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Решение. Обозначим $\sqrt{x^2+y^2}=\rho$. Тогда условие $x\to 0$; $y\to 0$ равносильно тому, что $\rho\to 0$. Теперь

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\ln(1-\rho^2)}{\rho}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{\rho\to 0}\frac{\frac{1}{1-\rho^2}\cdot(-2\rho)}{1}=\lim_{\rho\to 0}\frac{2\rho}{\rho^2-1}=0.$$

Как правило, вычисление пределов функции двух переменных оказывается существенно более трудной задачей по сравнению со случаем одной переменной. Причина заключается в том, что на прямой существуют всего 2 направления, по которым аргумент может стремиться к предельной точке − а именно, справа и слева. На плоскости же таких направлений − бесконечное множество, и пределы функции по разным направлениям могут не совпадать.

Пример 4.4. Найти предел функции $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Решение. Будем приближаться к точке O(0;0) по прямым $y=kx$. Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-k^2}{1+k^2}=\dfrac{1-k^2}{1+k^2}$. Меняя значения k, будем получать равные значения предела. Это означает, что данный предел не существует.

Предел функции двух переменных обладает свойствами, аналогичными свойствами предела функции одной переменной.

Например, справедливо утверждение: если функции $f(x;y)$ и $g(x;y)$ определены на множестве D и имеют в точке M_0 этого множества пределы A и B соответственно, то функции $f(x;y) \pm g(x;y)$, $f(x;y) \cdot g(x;y)$, $f(x;y)/g(x;y)$ имеют в точке M_0 пределы, которые соответственно равны A ± B, AB, A/B (если B ≠ 0).

Определение 4.4. Функция z = $f(x;y)$ называется непрерывной в точке $(x_0;y_0)$, если она:

1) определена в точке $(x_0;y_0)$;

2) имеет конечный предел при $x \to x_0$ и $y \to y_0$;

3) этот предел равен значению функции в точке $(x_0;y_0)$, т. е. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0)$.

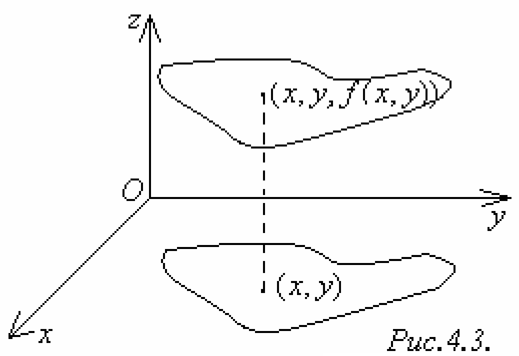

Рис.4.3.

Геометрический смысл непрерывности очевиден: график функции z = $f(x;y)$ в точке $(x_0;y_0)$ представляет собой сплошную, нерасслаивающуюся поверхность. Напомним, что графиком функции z = $f(x;y)$ называется совокупность точек $(x, y, f(x;y))$ трёхмерного пространства (рисунок 4.3).

4.3 Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

4.3.1 Частные производные первого порядка

Пусть задана функция z = $f(x;y)$. Так как x и y – независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять своё значение. Дадим независимой переменной x приращение Δx, сохраняя значение y неизменным. Тогда z получит приращение, которое называется **частным приращением z по x** и обозначается $\Delta_x z$. Итак,

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y).$$

Аналогично определяется **частное приращение z по y:**

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

Полное приращение Δz функции z определяется равенством

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$, то он называется

частной производной функции z = $f(x;y)$ в точке $M(x, y)$ по переменной

x и обозначается одним из символов: z'_x, $\frac{\partial z}{\partial x}$, f'_x, $\frac{\partial f}{\partial x}$. Частные производные по x в точке $M_0(x_0, y_0)$ обозначают символами $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_x\big|_{M_0}$

Аналогично определяется и обозначается **частная производная от** z = $f(x;y)$ **по переменной** y: $z'_y = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$.

Таким образом, частная производная функции нескольких переменных (двух, трёх и больше) определяется как производная функции одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных независимых переменных. Поэтому частные производные функции $f(x;y)$ находят по формулам и правилам вычисления производных функций одной переменной (при этом соответственно x и y считается постоянной величиной).

Пример 4.5. Найти частные производные функции z = $2y + e^{x^2 - y} + 1$

Решение. $z'_x = \left(2y + e^{x^2-y} + 1\right)'_x = (2y)'_x + \left(e^{x^2-y}\right)'_x + (1)'_x = 0 + e^{x^2-y}\left(x^2 - y\right)'_x + 0 =$ $= e^{x^2-y}(2x - 0) = 2x \cdot e^{x^2-y}$. $z'_y = 2 + e^{x^2-y}(-1) = 2 - e^{x^2-y}$.

4.3.2 Частные производные высших порядков

Частные производные $\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}$ называют **частными производными первого порядка.** Их можно рассматривать как функции от (x,y). Эти функции могут иметь частные производные, которые называются **частными производными второго порядка.** Они определяются и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{x^2}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{xy} = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{yx} = f''_{yx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{y^2}(x, y).$$

Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го и т. д. порядков.

Частные производные z''_{xy} и z''_{yx} называются смешанными **частными производными.**

Пример 4.6. Найти частные производные второго порядка функции z = $x^3 + 4x^2 y - 6xy^2 + y^3$.

Решение. Найти частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 8xy - 6y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4x^2 - 12xy + 3y^2.$$

Теперь $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 6x + 8y;$ $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 8x - 12y;$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 8x - 12y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -12x + 6y.$$

В рассмотренном примере смежные частные производные равны. Этот результат не случаен, так как справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. (Шварц). Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка отличаются лишь порядком дифференцирования, равны между собой. В частности, для $z = f(x;y)$ имеем: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

4.3.3 Дифференцируемость, полный дифференциал

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x;y)$. Напомним, что полное приращение функции в точке M:

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x;y).$$

Определение 4.5. Функция $z = f(x;y)$ называется **дифференцируемой** в точке $M(x;y)$, если её полное приращение в этой точке можно представить в виде $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, где $\alpha = \alpha(\Delta x;\Delta y) \to 0$ и $\beta = \beta(\Delta x;\Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Сумма первых двух слагаемых в этом равенстве называется **главной частью приращения функции.** Главная часть приращения функции $z = f(x;y)$ называется **полным дифференциалом** этой функции и обозначается символом dz:

$dz = A\Delta x + B\Delta y$.

Выражения $A\Delta x$ и $B\Delta y$ называют **частными дифференциалами.** Для независимых переменных x и y полагают $\Delta x = dz$, $\Delta y = dz$. Поэтому

$$dz = A\,dx + B\,dy.$$

Теорема 4.2. (необходимое условие дифференцируемости функции). Если функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $M(x;y)$, то она непрерывна в этой точке, имеет в ней частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, причём $\frac{\partial z}{\partial x} = A$, $\frac{\partial z}{\partial y} = B$.

Таким образом, полный дифференциал функции $z = f(x;y)$ вычисляется по формуле $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$.

Следующая теорема даёт достаточные условия дифференцируемости функции.

Теорема 4.3. Если функция z = $f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные z'_x и z'_y в точке M$(x;y)$, то она дифференцируема в этой точке и её полный дифференциал выражается формулой

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy .$$

Из определения дифференциала функции z = $f(x;y)$ следует, что при достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ имеет место приближённое равенство $\Delta z \approx dz$. Так как $\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y)$, то имеем формулу

$$\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) \approx f(x;y) + f'_x(x;y)\Delta x + f'_y(x;y)\Delta y .$$

Эта формула используется в приближённых расчётах.

Пример 4.7. Вычислить приближённо $1{,}02^{3{,}01}$.

Решение. Рассмотрим функцию $z = x^y$. Тогда $1{,}02^{3{,}01} = (x+\Delta x)^{y+\Delta y}$, где $x=1$, $\Delta x = 0{,}02$, $y=3$, $\Delta y = 0{,}01$. Найдём частные производные: $z'_x = (x^y)'_x = yx^{y-1}$, $y'_y = (x^y)'_y = x^y \ell nx$. Следовательно, $1{,}02^{3{,}01} \approx 1+3 \cdot 1^2 \cdot 0{,}02 + 1 \cdot \ell n1 \cdot 0{,}01$, откуда $1{,}02^{3{,}01} \approx 1{,}06$.

Для сравнения, используя калькулятор, находим $1{,}02^{3{,}01} \approx 1{,}061418168$.

4.3.4 Экстремум функции нескольких переменных

Пусть функция z = $f(x;y)$ определена в некоторой области D, точка $N(x_0;y_0) \in D$.

Точка $(x_0;y_0)$ называется **точкой максимума** функции z = $f(x;y)$, если существует такая δ-окрестность точки $(x_0;y_0)$, что для каждой точки $(x;y)$, отличной от $(x_0;y_0)$, из этой окрестности выполняется неравенство: $f(x;y) < f(x_0;y_0)$.

Аналогично определяется **точка минимума** функции: для всех точек $(x;y)$, отличных от $(x_0;y_0)$ из δ-окрестности точки $(x_0;y_0)$ выполняется неравенство: $f(x;y) > f(x_0;y_0)$.

Значение функции в точке в точке максимума (минимума) называется **максимумом (минимумом)** функции. Максимум и минимум называют её экстремумами.

Отметим, что, в силу определения, точка экстремума функции лежит внутри области определения функции; максимум и минимум имеют **локальный** (местный) характер; значение функции в точке $(x_0;y_0)$ сравнивается с её значениями в точках, достаточно близких к $(x_0;y_0)$. В области определения функция может иметь несколько экстремумов или не иметь ни одного.

Теорема 4.4. (необходимые условия экстремума).

Если в точке $N(x_0;y_0)$ дифференцируемая функция z = $f(x;y)$ имеет экстремум, то её частные производные в этой точке равны нулю: $f'_x(x;y)=0$, $f'_y(x;y)=0$.

Определение 4.6. Точка, в которой частные производные первого порядка функции z =$f(x;y)$ равны нулю, т. е. $f'_x=0$, $f'_y=0$, называется **стационарной** точкой функции z. Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называются **критическими точками.**

Для нахождения экстремумов функции в данной области необходимо каждую критическую точку функции подвергнуть дополнительному исследованию.

Теорема 4.5. (достаточное условие экстремума).

Пусть в стационарной точке $(x_0;y_0)$ и некоторой её окрестности функция $f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке $(x_0;y_0)$ значения $A=f''_{xx}(x_0;y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0;y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0;y_0)$. Обозначим $\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}= AC-B^2$.

Тогда:

1) если $\Delta>0$, то функция $f(x;y)$ в точке $(x_0;y_0)$ имеет экстремум: максимум, если A < 0: минимум, если A > 0;
2) если $\Delta<0$, то функция $f(x;y)$ в точке $(x_0;y_0)$ экстремумов не имеет.

В случае, когда $\Delta=0$ экстремум в точке $(x_0;y_0)$ может быть, а может и не быть.

Необходимы дополнительные исследования.

Пример 4.8. Найти экстремумы функции $f(x;y)=x^2+y^2-2x+4y+8$.

Решение. Находим $f'_x=2x-2$, $f'_y=2y+4$. Точки, в которых частные производные не существуют, отсутствуют. Находим стационарные точки, решая систему уравнений $\begin{cases} 2x-2=0 \\ 2y+4=0 \end{cases}$ Отсюда получаем точку M(1;-2).

Находим частные производные второго порядка: $f''_{xx}=2$, $f''_{xy}=0$, $f''_{yy}=2$. Тогда $A=2, B=0, C=2$. Вычисляем $\Delta = AC - B^2 = 4$. Так как $\Delta>0$ и $\Delta<0$, то в точке M(1;-2) функция имеет минимум, равный $f(1;-2)=1^2+(-2)^2-2\cdot 1+4+$ $+(-2)+8=3$.

4.4 Метод наименьших квадратов

На практике при решении экономических задач зависимость между переменными x и y представляется в виде набора значений $x_1, x_2, ..., x_n$ и соответствующих значений $y_1, y_2, ..., y_n$. Эти значения изображаются точками плоскости с координатами $(x_1;y_2),(x_2;y_2),...,(x_n;y_n)$. Ломаная линия, соединяющая эти точки, называются **экспериментальной кривой** (Рисунок 4.4).

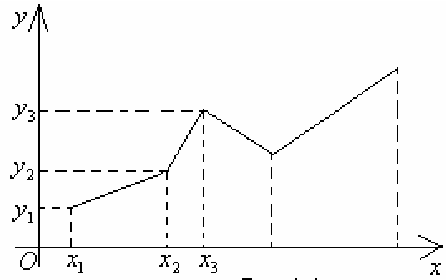

Рис.4.4.

Однако исследование характера и свойств зависимости между x и y лучше производить имея аналитическое задание этой зависимости $y=f(x)$, наиболее точно описывающей экспериментальные данные, что определяется экономическими или иными соображениями. В качестве таких функций используются следующие:

1) $y=ax+b$ — линейная функция;
2) $y=ax^2+bx+c$ — параболическая функция;
3) $y=\frac{a}{x}+b$ — гиперболическая функция;
4) $y=ax^b$ — показательная функция;
5) $y=ae^{bx}$ — экспоненциальная функция.

Выбранная для приближения функция называется **теоретической.** После выбора вида функции надо найти значения определяющих её параметров $(a;b;c)$ таким образом, чтобы отклонения значений функции от экспериментальных значений были минимальными. Минимизацию отклонений обычно проводят, находя минимум суммы квадратов отклонений S = $\sum_{i=1}^{n} V_i^2$, где $V_i^2 = y_i^T - y_i$ – отклонения теоретических значений функции от экспериментальных.

Общий метод наименьших квадратов для нахождения параметров на примере линейной функции: $y=ax+b$. Для этой функции коэффициенты a и b находят из системы уравнений:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Решения этой системы дают минимум функции S = S$(a;b)$, а сама система называется **системой нормальных уравнений.** Эта система линейная относительно неизвестных a, b и её определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Следовательно, система имеет единственное решение, которое можно найти по правилу Крамера:

$$a^* = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i & n \end{vmatrix}; \qquad b^* = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{vmatrix}.$$

Таким образом, наилучшим линейным приближением экспериментальной кривой по методу наименьших квадратов является прямая $y = a^* x + b^*$, где $(a^*; b^*)$ — решение системы нормальных уравнений.

Пример 4.9. Зависимость между прибылью предприятия Y (тыс. у.е.) и стоимостью основных фондов X (тыс. у.е.) задаётся таблицей

X	50	60	70	80	90	100	110
Y	25	27	33	42	40	49	60

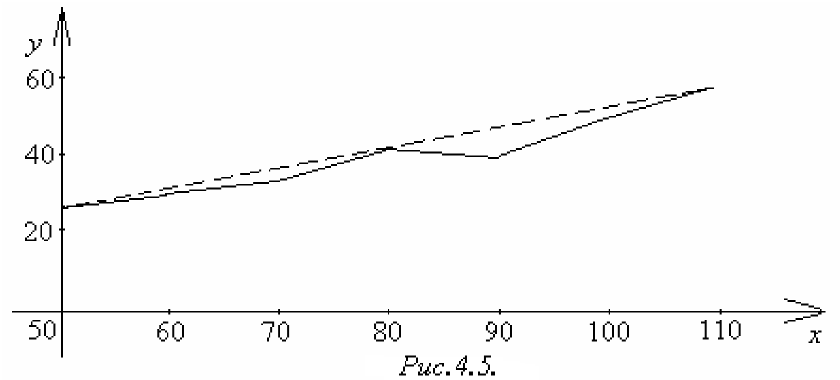

Рис.4.5.

Для выяснения вида теоретической зависимости построим график экспериментальной кривой (Рисунок 4.5).

По виду экспериментальной кривой можно предположить, что теоретическая зависимость является линейной $y = ax + b$.

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{7} x_i = 560$, $\sum\limits_{i=1}^{7} y_i = 276$, $\sum\limits_{i=1}^{7} x_i^2 = 47600$, $\sum\limits_{i=1}^{7} x_i y_i = 23640$.

По формулам

$\Delta = \begin{vmatrix} 47600 & 560 \\ 560 & 7 \end{vmatrix} = 19600$, $a^* = \frac{1}{19600}\begin{vmatrix} 23640 & 560 \\ 246 & 7 \end{vmatrix}$ =0,557, $b^* = \frac{1}{19600}\begin{vmatrix} 47600 & 23640 \\ 560 & 276 \end{vmatrix}$ =-5,143

Таким образом, теоретическая зависимость имеет вид $y = 0{,}557x - 5{,}143$.

Замечание. Если в качестве теоретической зависимости выбрана зависимость, отличная от линейной, то из условия $S'_a(a;b) = 0$, $S'_b(a;b) = 0$ находят соответствующую систему нормальных уравнений и решают её.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется функцией нескольких независимых переменных?
2. Что называется областью определения функции нескольких переменных?
3. Что называется пределом функции двух переменных?
4. Сформулируйте определение непрерывной функции двух переменных в точке и в области.
5. Что называется частным приращением функции двух переменных; полным приращением функции двух (нескольких) переменных?
6. Что называется частной производной и частным приращением функции двух переменных?
7. Что называется частным дифференциалом функции двух переменных?
8. Что называется частной производной второго порядка? Какие частные производные второго порядка называются смешанными?
9. Какая функция называется дифференцируемой?
10. Что называется полным дифференциалом функции двух переменных?
11. Сформулируйте теорему о равенстве смешанных частных производных второго порядка.
12. Дайте определение максимума (минимума) функции двух переменных.
13. Сформулируйте необходимые условия экстремума функции двух независимых переменных.
14. Какие точки называются критическими, как они находятся?
15. Сформулируйте достаточные условия экстремума функции двух независимых переменных.
16. В чем заключается метод наименьших квадратов?

5 Понятие двойного и тройного интегралов

5.1 Двойной интеграл и его свойства

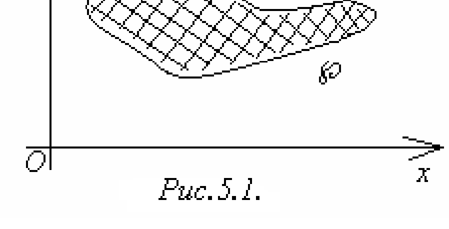

Рис.5.1.

Рассмотрим функцию $z = f(x; y)$, определённую в области S, которая ограничена замкнутой линией $\wp$ (рисунок 5.1). Область S сетью дуг разобьём на n элементарных областей $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. Предполагается, что область S и элементарные области $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ имеют площади, которые обозначим теми же символами. В каждой элементарной области ΔS_k $(k = 1,2,...,n)$ произвольно выберем точку $M_k(x_k; y_k)$, значение функции $f(x_k; y_k)$ в этой области умножим на площадь ΔS_k, составим сумму всех таких произведений:

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k; y_k)\Delta S_k .$$

Эта сумма называется **интегральной суммой** для функции $f(x; y)$ по области S. Обозначим через λ наибольший из диаметров элементарных областей ΔS_k $(k = 1,2,...,n)$.

Двойным интегралом от функции $f(x; y)$ по области S называется предел её интегральной суммы при $\lambda \to 0$:

$$\iint_S f(x; y)ds = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k; y_k)\Delta S_k .$$

Функция $f(x; y)$ называется **подинтегральной** функцией, а область S – **областью интегрирования.** Двойной интеграл от функции $f(x; y)$ по области S обозначается также следующим образом:

$$\iint_S f(x; y)dxdy .$$

Если предел существует, то функция $f(x; y)$ называется **интегрируемой** в области S. Отметим, что непрерывные в области S функции всегда интегрируемы.

Геометрический смысл двойного интеграла: двойной интеграл от функции $f(x; y) \geq 0$ по области S равен объёму цилиндроида с основанием S, который ограничен сверху поверхностью $z = f(x; y)$ (рисунок 5.2).

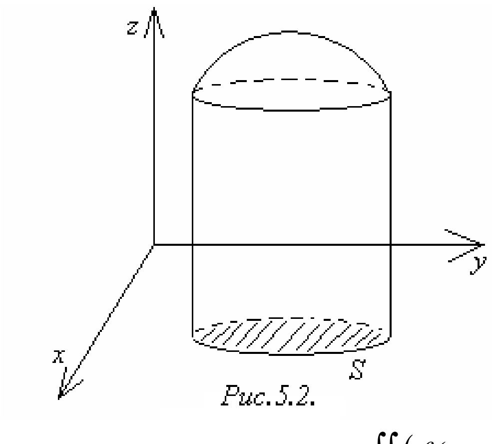

Рис. 5.2.

Свойства двойного интеграла.

1. Если функции $f(x; y)$ и $\varphi(x; y)$ интегрируемы в области S, то интегрируемы в ней их сумма и разность, причём

$$\iint_S \left(f(x; y) \pm \varphi(x; y)\right)ds = \iint_S f(x; y)ds \pm \iint_S \varphi(x; y)ds .$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла $\iint_S cf(x; y)ds = c\iint_S f(x; y)ds$, c = const.

3. Если $f(x; y)$ интегрируема в области S и S разбита на две не пересекающиеся области S_1 и S_2, то

$$\iint_S f(x; y)ds = \iint_{S_1} f(x; y)ds + \iint_{S_2} f(x; y)ds .$$

4. Если функции $f(x;y)$ и $\phi(x;y)$ интегрируемы в области S, в которой $f(x;y)\le \varphi(x;y)$, то $\iint\limits_S f(x;y)ds \le \iint\limits_S \varphi(x;y)ds$.

5. Если функция $f(x;y)$ интегрируема в области S, то $|f(x;y)|$ также интегрируема в ней, причём

$$\left|\iint\limits_S f(x;y)ds\right| \le \iint\limits_S |f(x;y)|ds.$$

6. Если в области S функция $f(x;y)$ удовлетворяет условиям $m \le f(x;y) \le M$, то $mS_1 \le \iint\limits_S f(x;y)ds \le MS_1$,

где S_1 ─ площадь области S.

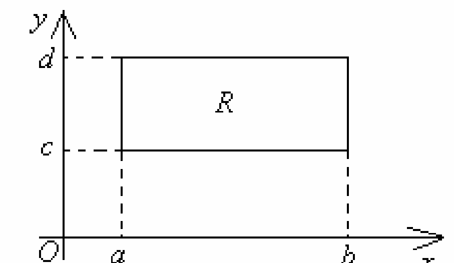

Рис. 5.3.

Вычисление двойного интеграла в прямоугольных декартовых координатах.

1. Пусть требуется вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_R f(x;y)dxdy, \qquad (5.1)$$

где R – прямоугольник, определяемый неравенствами $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ (рисунок 5.3).

Если функция $f(x;y)$ непрерывна в прямоугольнике R, то (5.1)

$$\iint\limits_R f(x;y)dxdy = \int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x;y)dy\right)dx.$$

Таким образом, вычисление двойного интеграла сводится к вычислению двух определённых интегралов; при вычислении «внутреннего» определённого интеграла x считается постоянным. Правая часть формулы (5.1) называется **повторным интегралом** и обозначается следующим образом: $\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x;y)dy\right)dx = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x;y)dy$.

Отметим, что результат интегрирования не зависит от порядка интегрирования, т. е. $\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x;y)dy = \int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x;y)dx$.

2. Чтобы рассмотреть более общий случай, введём понятие стандартной области. **Стандартной областью в направлении данной оси** называется такая область, для которой любая прямая, параллельная этой оси и имеющая с данной областью общие точки, пересекает границу области только в двух точках, т. е. пересекает саму область и её границу только по одному отрезку прямой.

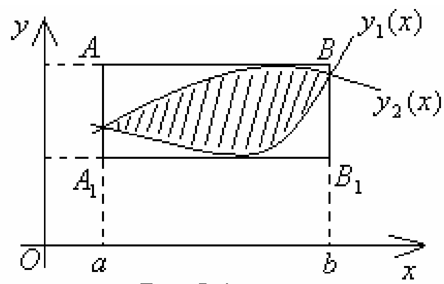

Рис. 5.4.

Предположим, что ограниченная область S является стандартной в направлении оси Oy и ограничена сверху графиком функции $y = y_2(x)$, снизу графиком функции $y = y_1(x)$ (рисунок 5.4).

Пусть AA_1B_1B — минимальный прямоугольник, в котором заключена данная область S. Тогда для непрерывной в области S функции $y = f(x;y)$

$$\iint_S f(x;y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x;y)dy\,.$$

Если же область S является стандартной в направлении оси Ox и определяется неравенствами $c \le y \le d$, $x_1(y) \le x \le x_2(y)$, то

$$\iint_S f(x;y)dxdy \;=\; \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x;y)dx\,.$$

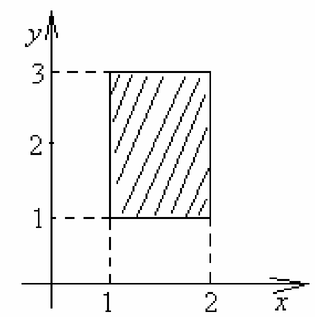

Рис.5.5.

Пример 5.1. Вычислить $\iint_S xydxdy$, если

$S = \{(x;y) : 1 \le x \le 2, 1 \le y \le 3\}$ (Рисунок 5.5).

Решение. Область S является прямоугольником, поэтому

$$\iint_S xydxdy = \int_1^2 dx \int_1^3 xydy = \int_1^2 (xy^2 \cdot \frac{1}{2})\Big|_1^3 dx = \int_1^2 (\frac{9}{2}x - \frac{1}{2}x)dx =$$

$$= \frac{9}{2}\int_1^2 xdx - \frac{1}{2}\int_1^2 xdx = \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right)\int_1^2 xdx = 4\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = 4 \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 6.$$

Пример 5.2. Вычислить $\iint_S (x^2 + xy + 2y^2)dxdy$ по области

$S = \{(x;y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x\}$ (Рисунок 5.6).

Решение. Область интегрирования изображена на рисунке. Имеем

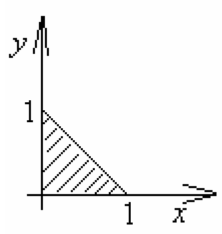

Рис.5.6.

$$\iint_S (x^2 + xy + 2y^2)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + xy + 2y^2)dy =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 y + x\frac{y^2}{2} + \frac{2}{3}y^3 \right)\Bigg|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(x^2(1-x) + x\frac{(1-x)^2}{2} + \frac{2}{3}(1-x)^3 \right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - x^3 + \frac{1}{2}(x - 2x^2 + x^3) + \frac{2}{3}(1 - 3x + 3x^2 - x^3) \right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{7}{6}x^3 + 2x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{2}{3} \right)dx = \left(-\frac{7}{6}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{3}x \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= -\frac{7}{25} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{-7 + 16 - 18 + 16}{24} = \frac{7}{24}.$$

Замечание 5.1. Если область интегрирования S не удовлетворяет условиям стандартной области, каждая из которых была бы стандартной в направлении одной из осей, и вычислить двойные интегралы по каждой части отдельно.

5.2 Тройной интеграл и его свойства

По аналогии с двойным интегралом вводится понятие тройного интеграла.

Рассмотрим ограниченную замкнутую пространственную область V и определённую в ней непрерывную функцию $u = f(x;y;z)$. Аналогично строится интегральная сумма по данному объёму и определяется тройной интеграл от функции $f(x;y;z)$ по пространственной области V:

$$\iiint_V f(x;y;z)dV = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k;y_k;z_k)\Delta V_k$$

или

$$\iiint_V f(x;y;z)dxdydz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k;y_k;z_k)\Delta V_k .$$

Тройной интеграл обладает свойствами, аналогичными свойствами двойного интеграла.

Предположим, что область V является **стандартной в направлении оси** Oz, т. е. удовлетворяет следующим условиям:

1) всякая прямая, параллельная оси Oz и имеющая с данной областью общие точки, пересекает границу области только в двух точках;
2) проекция S области V на плоскость Oxy представляет собой стандартную область в направлении оси Ox или оси Oy.

Если стандартная область V ограничена сверху поверхностью $z = z_2(x;y)$, снизу – поверхностью $z = z_1(x;y)$, а проекция S области V стандартна в направлении оси Oy и определяется неравенствами $a \le x \le b$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, то

$$\iiint_V f(x;y;z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(y)}^{y_2(y)} dy \int_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz .$$

Замечание 5.2. Если область S является стандартной в направлении оси Ox и определяется неравенствами $x_1(y) \le x \le x_2(y)$, $c \le y \le d$, то

$$\iiint_V f(x;y;z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dy \int_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz .$$

Замечание 5.3. Если область V является стандартной в направлении каждой координатной оси и её проекции на координатные плоскости являются стандартными в направлении каждой соответствующей оси, то пределы интегрирования в трёхкратном интеграле можно расставить шестью различными способами.

Замечание 5.4. Если V ─ прямоугольный параллелепипед, определяемый неравенствами $a \le x \le A$, $b \le y \le B$, $c \le z \le C$, то

$$\iiint_V f(x;y;z)dxdydz = \int_c^d dx \int_b^B dy \int_c^C f(x;y;z)dz .$$

Пример 5.3. Вычислить $\iiint\limits_V (x+y-z)dxdydz$, где V – параллелепипед, ограниченный плоскостями $x=-1, x=1, y-0, y=1, z=0, z=2.$

Решение. По замечанию 5.3 имеем

$$\iiint\limits_V (x+y-z)dxdydz = \int_{-1}^{1} dx \int_0^1 dy \int_0^2 (x+y-z)dz = \int_{-1}^{1} dx \int_0^1 \left(xz + yz - \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^2 dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_0^1 (2x+2y-2)dy = \int_{-1}^{1} (2xy+y^2-2y)\Big|_0^1 dx = \int_{-1}^{1} (2x+1-2)dx = \int_{-1}^{1} (2x-1)dx = \left(x^2-x\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$=\left(1-1-(1+1)\right)=-2 .$$

Пример 5.4. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$, где V — пирамида, ограниченная плоскостью $x+y+z=1$ и координатными плоскостями $x=0, y=0, z=0$ (Рисунок 5.7.).

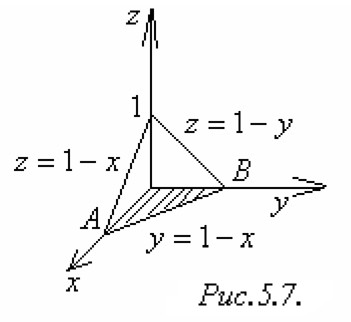

Рис.5.7.

Решение. Область V проектируется на плоскости Oxy в треугольник AOB, ограниченный прямыми $x=0, y=0, y=1-x$. Имеем

$$\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+y+z)dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^{1-x-y} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(y - yx^2 - xy^2 - \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^{1-x} dx \;\; \frac{1}{6}\int_0^1 (2-3x+x^3)dx = \frac{1}{8}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется двойным интегралом от функции двух независимых переменных по данной области? Укажите геометрическое толкование двойного интеграла.
2. Перечислите основные свойства двойного интеграла.
3. Что называется повторным интегралом?
4. Укажите способ вычисления двойного интеграла в случае, когда область интегрирования есть прямоугольник, стороны которого параллельны координатным осям.
5. Как вычислить двойной интеграл с помощью двукратного в случае произвольной области интегрирования в прямоугольной системе координат?
6. Что называется тройным интегралом от функции трех независимых переменных по данной области?
7. Какая область называется стандартной в направлении оси Oz?
8. Как вычисляется тройной интеграл в декартовой системе координат?

9. Как вычисляется тройной интеграл, если область является прямоугольным параллелепипедом?

6 Числовые и функциональные ряды

6.1 Основные понятия и свойства числовых рядов

Пусть дана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...$. Символ

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

обозначаемый $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, называется **числовым рядом** или просто **рядом,** а числа $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ – **членами** числового ряда. Суммы конечного числа членов ряда $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, S_n = a_1 + a_2 +,,,+ a_n, ...$ называются **частными суммами** (или **отрезками**) числового ряда. Рассмотрим последовательность $S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ...$. Если существует предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **сходящимся,** а число S – **суммой** этого ряда. В этом случае пишут

$$S = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Если же последовательность $S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ...$ не имеет предела, то ряд называется **расходящимся**. Такой ряд суммы не имеет.

Пример 6.1. Рассмотрим ряд, составленный из членов геометрической прогрессии $1, q, q^2, ..., q^{n-1}, ...$: $1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} + ...$.

Если $q \neq 1$, то $S_n = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} = \dfrac{q^{n-1}q - 1}{q - 1} = \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$.

Если прогрессия бесконечно убывающая, т. е. $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - q^n}{1 - q} = \dfrac{1}{1 - q}$.

Это означает, что при $|q| < 1$ ряд расходится и его сумма равна $\dfrac{1}{1 - q}$.

При $q = 1$ получаем ряд 1+1+1+…+1+…. Тогда $S_n = n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т. е. при $q = 1$ ряд расходится.

Пример 6.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Очевидно, что $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n+1}$ $(n = 1,2,...)$.

Поэтому $S_n = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + ... + \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n+1}$, откуда

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$.

Следовательно, данный ряд сходится и его сумма равна 1.

Свойства числовых рядов.

Свойство 6.1. Если в ряде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ отбросить конечное число m первых членов, то получим ряд

$$a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_{m+n} + ...,$$

который называется m**-ым остатком** данного ряда. m**-ый** остаток данного ряда сходится (или расходится) одновременно с данным рядом. Это означает, что при исследовании ряда на сходимость можно игнорировать конечное число его первых членов.

Свойство 6.2. Необходимый признак сходимости ряда:

общий член a_n сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Это означает, что если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Пример 6.3. Рассмотрим снова ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ из примера 1 при $|q| \geq 1$. Тогда $\left|q^{n-1}\right| = |q|^{n-1} \geq 1$ и, следовательно, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} q^{n-1} \neq 0$, т.е. ряд при $|q| \geq 1$ расходится.

Пример 6.4. Рассмотрим ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...,$

который называется **гармоническим рядом.** Отметим, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0'.$$

Однако это ничего не говорит о сходимости данного ряда. Если предположить, что гармонический ряд сходится и его сумма равна S, то $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ и $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$. Тогда $\lim_{n\to\infty} (S_n - S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$.

Однако это противоречит тому, что

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, гармонический ряд расходится.

Свойство 6.3. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$, где c – произвольное число, также сходится и его сумма равна cS.

Свойство 6.4. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы соответственно равны S_1 и S_2, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ также сходится и его сумма $S = S_1 + S_2$.

6.2 Сходимость числовых рядов

6.2.1 Сходимость рядов с положительными членами

Положительным рядом называется ряд, члены которого неотрицательны.

Признак сравнения рядов. Пусть даны два положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots \qquad (6.1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots \qquad (6.2)$$

Если выполняется условие $a_n \le b_n \ (n = 1,2,\dots)$, то из сходимости ряда (6.2) следует сходимость ряда (6.1), а из расходимости ряда (6.1) следует расходимость ряда (6.2).

Пример 6.5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$.

В примере 6.2 мы доказали, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится. Так как $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)} \ (n = 1,2,\dots)$, то по признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ также сходится.

Признак Даламбера. Если члены положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ таковы, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, то при $\rho > 1$ ряд расходится, а при $\rho < 1$ сходится.

Пример 6.6. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Для этого ряда $a_n = \frac{1}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$

По признаку Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится.

Интегральный признак Коши. Пусть члены положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ такие, что $a_1 = f(1), a_2 = f(2), \dots, a_n = f(n), \dots$, где функция $f(x)$ при $x \ge 1$ непрерывна, положительна убывает. Тогда данный ряд и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится или расходится одновременно.

Пример 6.7. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \ (\alpha > 0)$.

Функция $f(x) = \frac{1}{x^{\varepsilon}}$, $x \ge 1$, удовлетворяет условиям, указанным в интегральном признаке. Исследуем интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty, & если\ \alpha \le 1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1}, & если\ \alpha > 1 \end{cases} .$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \le 1$.

6.2.2 Сходимость знакочередующихся рядов

Определение 6.1. Знакочередующимся рядом называется ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots, \tag{6.3}$$

где $a_n > 0, n = 1,2,\ldots$

Признак Лейбница. Если члены знакочередующегося ряда (6.3) удовлетворяют условиям: а) $a_{n+1} < a_n$ $(n = 1,2,\ldots$; б) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$,

то знакочередующийся ряд сходится.

Пример 6.8. Знакочередующийся ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

так как условия теоремы Лейбница здесь выполнены.

6.2.3 Абсолютная и условная сходимость рядов

Перейдём теперь к рядам с членами, имеющими любой знак. С каждым таким рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{6.4}$$

связан ряд с неотрицательными членами, составленный из модулей членов данного ряда, т. е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{6.5}$$

Определение 6.2. Ряд (6.4) называется **абсолютно сходящимся,** если ряд (6.5) сходится. Если же ряд (6.4) сходится, а ряд (6.5) расходится, то ряд (6.4) называется **условно сходящимся.**

Теорема 6.1. Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

Пример 6.10. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ абсолютно сходится при $\alpha > 1$ (см. пример 6.11). Этот ряд сходится условно при $0 < \alpha \le 1$. Действительно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \le 1$, как доказано в примере 6.7. Однако при $0 < \alpha \le 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ сходится по признаку Лейбница.

6.3 Функциональные ряды

Будем рассматривать ряды, членами которых являются не числа, а функции:
$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \qquad (6.6)$$
Такие ряды называются **функциональными.**

Например, ряд
$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$
является функциональным.

Если в ряде (6.6) положим $x=x_0$, где x_0 – значение из области определения функций $u_n(x)$, $n=1,2,\ldots$, то получим числовой ряд
$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots \qquad (6.7)$$
Если ряд (6.7) сходится, то x_0 называется **точкой сходимости** ряда (6.6). Если же ряд (6.7) расходится, то точка x_0 называется **точкой расходимости** ряда (6.6).

Определение 6.3. Совокупность всех точек сходимости функционального ряда называется **областью его сходимости.**

6.4 Степенные ряды

Определение 6.4. Степенным рядом называется функциональный ряд вида
$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots, \qquad (6.8)$$
где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – действительные числа, называемые **коэффициентами** степенного ряда.

1) Если степенной ряд сходится лишь в точке $x=0$, то он относится к рядам **первого класса.**

Например, ряд
$$1+x+2!x^2+3!x^3+\ldots+n!x^n+\ldots \qquad (6.9)$$
относится к рядам первого класса. Зафиксируем $x\neq 0$ и рассмотрим числовой ряд
$$1+|x|+2!|x|^2+3!|x|^3+\ldots+n!|x|^n+\ldots$$
По признаку Даламбера
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{n!|x|^n}=|x|\lim_{n\to+\infty}(n+1)=\infty$$
и ряд расходится при всех $x\neq 0$. Следовательно, ряд (6.9) сходится только при $x=0$.

2) Если ряд (6.8) сходится на всей числовой прямой, то он относится к рядам **второго класса.**

Например, применив признак Даламбера при фиксированном *x,* нетрудно убедиться, что к рядам второго класса относится ряд
$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

3) Ряд (6.8), не принадлежит первому и второму классам, его относят к рядам **третьего класса.**

Теорема 6.2. (теорема Абеля). Если степенной ряд (6.8) сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится для любого x, удовлетворяющего условию $|x| < |x_0|$; если же степенной ряд (6.8) расходится при $x = x_0$, то он расходится и при любом x, удовлетворяющем условию $|x| > |x_0|$.

Следствие. Для каждого степенного ряда (6.8) третьего класса существует число $R > 0$, называемое **радиусом сходимости** этого ряда, для которого выполняется условие: при $|x| < R$ ряд (6.8) сходится абсолютно, при $|x| > R$ ряд (6.8) расходится.

Промежуток $(-R; R)$ называется **интервалом сходимости** степенного ряда. Для степенного ряда (6.8) второго класса интервал сходимости $(-\infty; +\infty)$.

Областью сходимости степенного ряда (6.8) является интервал $(-R; R)$, к которому в отдельных случаях добавляется один или оба конца этого интервала (это исследуется для конкретных рядом при $x = -R$ и $x = R$).

Для степенного ряда (6.8) первого класса полагают $R = 0$; для степенного ряда (6.8) второго класса $R = \infty$.

Теорема 6.3. Пусть для степенного ряда (6.8) существует и отличен от нуля предел

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L. \text{ Тогда } R = \frac{1}{L}.$$

Пример 6.11. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 5^n x^n$.

Решение. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 5^n x^n = 1 - 5x + 5^2 x^2 - \ldots + (-1)^n 5^n x^n + \ldots$.

Рассмотрим $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot 5^{n+1}}{(-1)^n \cdot 5^n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{-5}{1} \right| = 5$. Тогда $R = \frac{1}{5}$. Итак, $\left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{5} \right)$ – интервал сходимости.

Исследуем ряд на концах интервала.

1) $x = -\frac{1}{5}$. Имеем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 5^n \cdot \left(-\frac{1}{5} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1$.

Этот ряд расходится согласно необходимого признака сходимости рядов.

2) $x = \frac{1}{5}$. Имеем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 5^n \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$.

Тогда $S_n = \begin{cases} 0, \text{ если } n - \text{нечётное} \\ 1, \text{ если } n - \text{чётное} \end{cases}$

Поэтому $\lim_{n \to +\infty} S_n$ не существует и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ расходится.

Итак, область сходимости ряда $\left(-\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right)$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется числовым рядом, общим членом ряда?
2. Что называется частичной суммой ряда?
3. Что называется суммой ряда?
4. Какой ряд называется сходящимся, расходящимся?
5. В чем состоит необходимый признак сходимости ряда?
6. Какой ряд называется гармоническим? Выполняется ли для него необходимый признак сходимости? Сходится ли гармонический ряд?
7. Сформулируйте достаточные признаки сходимости, основанные на сравнении рядов с положительными членами.
8. Сформулируйте признак Даламбера сходимости рядов с неотрицательными членами.
9. Сформулируйте интегральный признак Коши сходимости рядов с неотрицательными членами.
10. Какой ряд называется знакочередующимся?
11. Сформулируйте признак Лейбница.
12. Какой ряд называется абсолютно сходящимся; условно сходящимся?
13. Дайте определение функционального ряда, его области сходимости.
14. Какой ряд называется степенным?
15. Что называется радиусом сходимости, интервалом сходимости, областью сходимости?
16. По какой формуле вычисляется радиус сходимости?

7 Дифференциальные уравнения первого порядка

7.1 Основные понятия

Дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x)$ и её производные. Если искомая функция есть функция одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется **обыкновенным.** Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется **порядком** данного уравнения. Следовательно, общий вид ДУ n-го порядка следующий.

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (7.1)$$

Например, уравнения

а) $y' - yx = x^2$, б) $y'' + y' = 1$

соответственно ДУ 1-го и 2-го порядков.

Функция $y=f(x)$, которая при подстановке её в уравнение (7.1) обращает это уравнение в тождество, называется **решением** этого уравнения.

7.2 Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальные уравнения 1-го порядка имеет общий вид

$$F(x,y,y')=0 \tag{7.2}$$

или вид

$$y'=f(x;y), \tag{7.3}$$

если уравнение (7.2) можно разрешить относительно y.

Решение уравнение (7.3), содержащее произвольную постоянную C, т. е. имеющее вид $y=\varphi(x,C)$, называется **общим решением** этого уравнения. Иногда решение получается в неявной форме $\Phi(x,y,C)=0$ или $\psi(x,y)=C$. Такое решение называют **общим интегралом** уравнения (7.2). Решение, которое получается из общего при некотором фиксированном значении произвольной постоянной C, называется **частным решением.** Условие, что при $x=x_0$ функция y должна равняться числу y_0, называется **начальным условием.** Начальное условие даёт возможность выделить из общего решения частное решение.

7.2.1 Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида

$$M_1(x)M_2(y)+y'N_1(x)N_2(y)=0 \tag{7.4}$$

называется уравнением с **разделяющимися переменными.**

Уравнение (7.4) можно записать в виде

$M_1(x)M_2(y)+\dfrac{dy}{dx}N_1(x)N_2(y)=0$, $M_1(x)M_2(y)dx+N_1(x)N_2(y)dy=0$.

Делим обе части уравнения на $M_2(y)N_1(x) \quad (\neq 0)$.

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=0$$

Интегрируя обе части, получаем общий интеграл уравнения (7.4):

$$\int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\int\frac{N_2(x)}{M_2(y)}dy=0.$$

Пример 7.1. Решить уравнение $xdx+ydy=0$.

Решение. $\int xdx+\int ydy=C$, $\quad \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}=C$ или $x^2+y^2=C_1$ – общий интеграл уравнения.

Пример 7.2. Решить уравнение $xy'-y=0$.

Решение. Запишем уравнение в виде $xdy=ydx$, $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{x}$, $\int\dfrac{dy}{y}=\int\dfrac{dx}{x}$,

$\ell ny = \ell nx + C_1$, $C_1 = \ell nC$, $\ell ny = \ell nx + \ell nC$, $y = Cx$.

7.2.2 Однородные дифференциальные уравнения

Функция $f(x;y)$ называется **однородной** измерения m, если имеет место тождество $f(tx;ty) = t^m f(x;y)$

Уравнение $M(x;y)dx + N(x;y)dy = 0$ называется **однородным ДУ 1-го порядка,** если функции $M(x;y)$ и $N(x;y)$ – однородные функции одного и того же измерения.

С помощью подстановки $y = ux$, где u – некоторая новая искомая функция от x, однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 7.3. Решить уравнение $(y^2 - 3x^2)dx + 2xydy = 0$,если при $x = 0, y = 0$.

Решение. Так как $M(tx;ty) = (ty)^2 - 3(tx)^2 = t^2(y^2 - 3x^2) = t^2 M(x;y)$.

$N(tx;ty) = 2(tx)(ty) = t^2(2xy) = t^2 N(x;y)$,

то данное уравнение однородное. Пусть $y = ux$, тогда $dy = udx + xdu$. Имеем

$(u^2x^2 - 3x^2)dx + 2xux(udx + xdu) = 0$, $3x^2(u^2 - 1)dx + 2x^3udu = 0$, $\frac{3}{x}dx + \frac{2udu}{u^2 - 1} = 0$,

$3\ell nx + \ell n(u^2 - 1) = \ell nC$, $x^3(u^2 - 1) = C$. Так как $u = \frac{y}{x}$, то

$$x^3\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right) = C,\quad x(y^2 - x^2) = C.$$

Так как при $x = 0$ $y = 0$, то $C = 0$. Частные решения $y = \pm x$.

7.2.3 Линейные дифференциальные уравнения

Уравнение $y' + p(x)y = q(x)$ называется **линейным ДУ 1-го порядка.**

Для решения используют подстановку $y = uv$, где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция, $v = v(x)$ выбирают специальным образом.

$$u'v + v'u + puv = q,$$

$$v\frac{du}{dx} + u\left(\frac{dv}{dx} + pv\right) = q.$$

Функцию $v = v(x)$ выбирают так, чтобы $\frac{dv}{dx} + pv = 0$.

Пример 7.4. Решить уравнение $y' - \frac{y}{x} = x.$

Решение. Пусть $y = uv$, тогда $u'v + v'u - \frac{uv}{x} = x$ $v\frac{du}{dx} + u\left(\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x}\right) = x$.

$$\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}, \quad \ell nv = \ell nx, \quad v = x.$$

Тогда $x\frac{du}{dx} = x$, $xdu = xdx$, $du = dx$, $u = x + C$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Что называется порядком дифференциального уравнения?
3. Что называется решением дифференциального уравнения?
4. Что называется общим решением дифференциального уравнения 1-го порядка, 2-го порядка?
5. Что называется частным решением дифференциального уравнения?
6. Какое дифференциальное уравнение 1-го порядка называется уравнением с разделяющимися переменными и как оно интегрируется?
7. Какое дифференциальное уравнение 1-го порядка называется однородным? Укажите способ его решения.
8. Какое уравнение 1-го порядка называется линейным? Укажите способ его решения.

8 Дифференциальные уравнения второго порядка

8.1 Интегрируемые типы дифференциальных уравнений второго порядка

Общий вид ДУ второго порядка $F(x, y, y', y'') = 0$

Общее решение $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ этого уравнения содержит две независимые произвольные постоянные C_1 и C_2. Если заданы начальные условия $y = y_0$, $y' = y'_0$ при $x = x_0$, то из системы

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2) \\ y'_0 = \varphi'_x(x_0, C_1, C_2) \end{cases}$$

можно, вообще говоря определить постоянные C_1 и C_2 и найти тем самым **частное решение** $y = \varphi(x)$ данного уравнения, удовлетворяющее начальным уравнениям.

Рассмотрим некоторые случаи, когда уравнение второго порядка решается применением операций неопределённого интегрирования.

1.1. Пусть $y'' = f(x)$.

Интегрируя, получим $y' = \int f(x) + C_1$.

Интегрируя ещё раз, получим $y = \int dx \int f(x)dx + C_1 x + C_2$,

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Пример 8.1. Найти частное решение ДУ $y'' = x + 1$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Решение. Интегрируем обе части дважды:

$$y' = \int (x+1)dx + C_1, \quad y' = \frac{x^2}{2} + x + C_1, \; y = \int\left(\frac{x^2}{2} + x + C_1\right)dx + C_2, \; y = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Получим общее решение данного ДУ. Находим частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$, $\begin{cases} C_2=0 \\ C_1=1 \end{cases}$, $y=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{2}+x$.

1.2. Пусть $y''=f(y)$. Положим $y'=p(y)$. Тогда $y''=\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=p\cdot\dfrac{dp}{dy}$.

Следовательно, исходное уравнение принимает вид $p\dfrac{dp}{dy}=f(y)$.

Разделяя переменные, получим $pdp=f(y)dy$.

Интегрируя последнее уравнение, находим $\dfrac{p^2}{2}=\int f(y)dy+C_1$

или

$p=\pm\sqrt{2\int f(y)dy+2C_1}$, $\dfrac{dy}{dx}=\pm\sqrt{2\int f(y)dy+2C_1}$.

Разделим переменные

$\dfrac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy+2C_1}}=\pm dx$. Тогда $\dfrac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy+2C_1}}=\pm(x+C_2)$.

Пример 8.2. Решить уравнение $y''=y^{-3}$.

Решение. Полагаем $y'=p(y)$. Тогда $y''=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=p\cdot\dfrac{dp}{dy}$.

Подставляя в уравнение, имеем $p\dfrac{dp}{dy}=y^{-3}$.

Разделяя переменные и интегрируя, получим $pdp=y^{-3}dy$, откуда $p^2=-y^{-2}+\tilde{N}$, $\dfrac{dy}{dx}=\pm\dfrac{\sqrt{C_1y^2-1}}{y}$, $\dfrac{ydy}{\sqrt{C_1y^2-1}}=\pm dx$.

Умножим обе части на C_1 и проинтегрируем их

$\int\dfrac{C_1y}{\sqrt{C_1y^2-1}}dy=\pm\int C_1dx$, $\sqrt{C_1y^2-1}=\pm(C_1x+C_2)$, откуда $C_1y^2-1=(C_1x+C_2)^2$.

1.3. Пусть $y''=f(y')$. Полагаем $y'=p(x)$. Тогда $y''=\dfrac{dp}{dx}$ и данное уравнение принимает вид $\dfrac{dp}{dx}=f(p)$. Разделяя переменные и интегрируя, последовательно будем иметь $\dfrac{dp}{f(p)}=dx$, $\int\dfrac{dp}{f(p)}=x+C_1$.

Определив из этого уравнения величину $p=\dfrac{dy}{dx}$, путём вторичного интегрирования можно найти и y.

Пример 8.3. Найти решение уравнения $2y'y''=1$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1)=0$, $y'(1)=1$.

Решение. Полагаем $y'=p$ и $y''=\dfrac{dp}{dx}$. Тогда $2p\dfrac{dp}{dx}=1$, откуда $2pdp=dx$, $p^2=x+C_1$.

Используя начальное условие $y'(1)=1$, имеем $1=1+C_1$, откуда $C_1=0$. Следовательно, $p^2=x$. Тогда $p=\frac{dy}{dx}=\sqrt{x}$, причём перед корнем взят знак «+», т. к. при $x=1$ мы должны иметь $p=1$.
Разделяя переменные и интегрируя, находим
$y=\int\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_2$. Т.к. $y(1)=0$, то $0=\frac{2}{3}+C_2$, откуда $C_2=-\frac{2}{3}$.

Таким образом, искомое решение есть $y=\frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}-1\right)$.

8.2 Случаи понижения порядка

Укажем два случая, когда ДУ второго порядка

$$y''=f(x,y,y') \tag{8.1}$$

приводится к ДУ первого порядка.

2.1. Пусть уравнение (8.1) имеет вид

$$y''=f(y,y').$$

Полагая $y'=p(y)$ и $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$, получим ДУ первого порядка

$$p\frac{dp}{dy}=f(y,p),$$

где роль независимой переменной играет y.

Пример 8.4. Решить уравнение $y''=\frac{y'^2}{y}$.

Решение. Полагаем $y'=p(y)$, $y''=p\frac{dp}{dy}$. Тогда уравнение примет вид $p\frac{dp}{dy}=\frac{p^2}{y}$, $p\left(\frac{dp}{dy}-\frac{p^2}{y}\right)=0$.

Отсюда либо $p=0$, т. е. $y'=0$, $y=c$ либо $\frac{dp}{dy}=\frac{p}{y}$, т. е. $\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}$ и $\ell np=\ell ny+\ell nC_1$, откуда $p=yC_1$. Следовательно, $\frac{dy}{dx}=C_1y$, $\frac{dy}{y}=C_1dx$ и $\ell ny=C_1x+\ell nC_2$. Тогда $y=C_2e^{C_1x}$.

2.2. Пусть уравнение (8.1) имеет вид $y''=f(y,y')$

Полагая $y'=p(y)$ и $y''=\frac{dp}{dx}$, получим уравнение первого порядка $\frac{dp}{dx}=f(x,p)$ с неизвестной функцией p.

Пример 8.5. Решить уравнение $xy''=2x-y'$.

Решение. Полагаем $y'=p(y)$ и $y''=\frac{dp}{dx}$.

Тогда $x\frac{dp}{dx}=2x-p$, или $xdp=(2x-p)dx$. Полученное уравнение является однородным ДУ 1-го порядка. Сделаем замену $p=ux$ и следовательно $dp=xdu+udx$, а уравнение принимает вид

$x(xdu+udx)=(2x-ux)dx$, $x^2du+xudx=(2x-ux)dx$, $x^2du=2x(1-u)dx$, $\frac{du}{1-u}=\frac{2dx}{x}$.

Интегрируя, получим $\ell n(1-u)=-2\ell nx+\ell nC_1$ и, следовательно $1-u=\frac{C_1}{x^2}$, $\frac{p}{x}=1-\frac{C_1}{x^2}$ и $p=x-\frac{C_1}{x}$. Тогда $\frac{dy}{dx}-x-\frac{C_1}{x}$, $dy=\left(x-\frac{C_1}{x}\right)dx$, откуда $y=\frac{x^2}{2}-C_1\ell nx+C_2$.

8.3 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

8.3.1 Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''+py'+qy=0 \qquad (8.2)$$

Для решения данного уравнения составляют характеристическое уравнение $k^2+pk+q=0$.

Возможны три случая:

а) $D=p^2-4q>0$. Тогда $k_1\neq k_2-$ корни характеристического уравнения и уравнение (2) имеет общее решение вида $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$.

б) $D=p^2-4q=0$. Тогда $k_1=k_2=-\frac{p}{2}$ и общее решение уравнения (8.2) имеет вид

$$y=e^{-\frac{p}{2}x}(C_1+C_2x).$$

в) $D=p^2-4q<0$. Тогда общее решение уравнения (2) имеет вид

$$y=e^{-\frac{p}{2}x}\left(C_1\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}\cdot x\right)+C_2\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}\cdot x\right)\right).$$

Пример 8.6. Решить уравнение $y''-6y'+13y=0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и составим дискриминант $k^2-6k+13=0$, $D=36-52=-16$.

Согласно случаю в) имеем $y=e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

8.3.2 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''+py'+qy=f(x) \qquad (8.3)$$

где $p,q-$ постоянные числа, $f(x)$ – известная функция от x.

Теорема. Общее решение неоднородного уравнения (8.3) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения (8.2) и частного решения данного неоднородного уравнения.

Так как находить общее решение линейного однородного ДУ с постоянными коэффициентами мы умеем, то осталось указать способ нахождения частного решения данного неоднородного линейного ДУ. При рассмотрении этой задачи мы ограничимся лишь простейшими правыми частями уравнения

$$y'' + py' + qy = f(x).$$

1. Правая часть уравнения $f(x)$ есть показательная функция, т. е.

$$f(x) = ae^{mx} \quad (a \neq 0).$$

а) если m не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде $z = Ae^{mx}$;

б) если характеристическое уравнение имеет два равных корня и m – один из корней, то частное решение ищем в виде $z = Axe^{mx}$;

в) если характеристическое уравнение имеет два одинаковых корня, равных числу m, то частное решение ищут в виде $z = Ax^2e^{mx}$.

Пример 8.7. Решить уравнение $y'' - 5y' + 6y = e^x$.

Решение. Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' - 5y' + 6y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 - 5k + 6 = 0$ имеет корни $k_1 = 2, k_2 = 3$. Общее решение однородного уравнения $\bar{y} = C_1e^{3x} + C_2e^{2x}$.

Так как $m = 1$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде $z = Ae^x$, где A – неопределённый коэффициент. Тогда $z' = Ae^x$, $z'' = Ae^x$ и, подставляя в уравнение, имеем $Ae^x - 5Ae^x + 6Ae^x = e^x$, откуда $A = \frac{1}{2}$. Итак, частное решение $z = \frac{1}{2}e^x$. Общее решение линейного неоднородного уравнения $y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^x$.

2. Правая часть неоднородного уравнения есть тригонометрический полином $f(x) = M \cdot \cos wx + N \cdot \sin wx$.

Частное решение ищут в форме тригонометрического полинома $z = A \cdot \cos wx + B \cdot \sin wx$, где A и B неопределённые коэффициенты, или $z = x \cdot (A \cdot \cos wx + B \cdot \sin wx)$.

Пример 8.8. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = \cos x$.

Решение. Соответствующее однородное уравнение имеет два одинаковых корня $k_{1,2} = 2$. Следовательно, общее решение его $\bar{y} = e^{2x}(C_1x + C_2)$.

Будем искать частное решение в виде $z = A \cdot \cos x + B \cdot \sin x$. Тогда $z' = -A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$, $z'' = -A \cdot \cos x - B \cdot \sin x$. Подставляя в уравнение и приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ справа и слева, получим

$$\begin{cases} 3A - 4B = 1 \\ 4A + 3B = 0 \end{cases},$$

откуда $A = \frac{3}{25}$, $B = -\frac{4}{25}$. Частное решение $z = \frac{3}{25}\cos x - \frac{4}{25}\sin x$.
Общее решение данного неоднородного уравнения
$y = e^{2x}(C_1 x + C_2) + \frac{3}{25}\cos x - \frac{4}{25}\sin x$.

3. Правая часть линейного уравнения представляет собой многочлен, например, второй степени

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0).$$

Ищем частное решение этого уравнения в виде

$$z = Ax^2 + Bx + C,$$

где A, B, C – неопределённые коэффициенты, если $q \neq 0$. Если же $q = 0$, то при $p \neq 0$ частное решение ищем в виде $z = x(Ax^2 + Bx + C)$.
Аналогично поступают, если $f(x)$ многочлен другой степени.

Пример 8.9. Решить уравнение $y'' - 4y' + 13y = 2x + 1$.

Решение. Составим характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения $k^2 - 4k + 13 = 0$ $D = 16 - 52 = -36$
Общее решение $\overline{y} = e^{2x} \cdot (C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \sin 3x)$.
Частное решение ищем в виде $z = Ax + B$.
Отсюда $z' = A$, $z'' = 0$. Подставляя в неоднородное уравнение, получим $A = \frac{2}{13}$, $B = \frac{21}{169}$. Частное решение $z = \frac{2}{13}x + \frac{21}{169}$.
Общее решение неоднородного уравнения
$y = e^{2x} \cdot (C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \sin 3x) + \frac{2}{13}x + \frac{21}{169}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое уравнение называется дифференциальным второго порядка?
2. Укажите некоторые виды дифференциальных уравнений второго порядка, которые решаются применением операции неопределенного интегрирования.
3. Какие дифференциальные уравнения второго порядка допускают понижение порядка, т. е. приводятся к уравнению первого порядка? Изложите способ решения таких уравнений.
4. Какое уравнение называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка?
5. Какой вид имеет общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
6. Какое уравнение называется характеристическим и как оно находится для данного линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?

7. Какой вид имеет общее решение однородного линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, если корни его характеристического уравнения действительные и различные, кратные, комплексные?

8. Какой вид имеет общее решение неоднородного линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy= f(x)$ (8.1), если y — частное решение данного неоднородного уравнения, а y_0 — общее решение соответствующего однородного уравнения $y''+py' + y=0$ (8.2)?

9. В какой форме следует искать (какой вид имеет) частное решение данного неоднородного уравнения y, если $f(x)$ есть многочлен степени n, а один из корней характеристического уравнения для однородного уравнения (8.2) равен нулю?

10. В какой форме следует искать (какой вид имеет) частное решение данного неоднородного уравнения, если $f(x)$ есть показательная функция вида ae^{mx}, а m не совпадает, совпадает с одним, совпадает с двумя корнями характеристического уравнения?

11. В какой форме следует искать (какой вид имеет) частное решение данного неоднородного уравнения y, если $f(x)=M\cos wx + N\sin wx$?

Литература

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : в 2 ч. / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2004. – 280 с.

2. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов / Н. Ш. Кремер. – М. : «Юнити». 1997 г. – 439 с.

3. Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. – М., 1978. – 352 с.

4. Яблонский, А. И. Высшая математика /А. И. Яблонский. – Мн. : Высшая школа, 2000. – 351 с.

5. Гусак, А. А. Задачи и упражнения по высшей математике / А. А. Гусак. – Мн. : Высшая школа, 1988. – 544 с.

6. Гурский, Е. И. Руководство к решению задач по высшей математике / Е. И. Гурский. – Мн. : Высшая школа, 1989. – 348 с.

7. Александров, П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / П. С. Александров. – М. : Наука, 1979. – 512 с.

8. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии / А. А. Бурдун [и др.]. – Мн. : Университетское, 1999. – 302 с.

9. Милованов, М. В. Алгебра и аналитическая геометрия / М. В. Милованов, Р. И. Тышкевич, А. С. Феденко. – Мн. : Вышэйшая школа, 1984. – 269 с.

10. Гусак, А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие по решению задач / А. А. Гусак. – Мн. : ТетраСистемс, 2001. – 288 с.

11. Тер-Крикоров, А. М. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. – М. : Наука Гл. ред. физ.-мат. Лит., 2001. – 672 с.

12. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов / Н. С. Пискунов. – М.: Наука, 1970. – 560 с.

13. Бугров, Я. С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функция комплексного переменного / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука,1981. – 506 с.

14. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Р. Ф. Апатенок [и др.]. – Мн. : Вышэйшая школа, 1986. – 272 с.

15. Выготский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выготский. – М. : Наука, 1966. – 872 с.

16. Справочник по высшей математике / А. А. Гусак [и др.]. – Мн. : ТетраСистемс, 2000. – 638 с.

Учебное издание

БУЗЛАНОВ АЛЕКСАНДР ВАСИЛЬЕВИЧ
БОРОДИЧ ЕЛЕНА НИКОЛАЕВНА
БОРОДИЧ РУСЛАН ВИКТОРОВИЧ
БОРОДИЧ ТИМУР ВИКТОРОВИЧ

Высшая математика:
интегральное исчисление, дифференциальные уравнения, ряды.
практическое руководство
для студентов экономических специальностей

Рекомендованы к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Подписано в печать __.__.__. Формат 60х84 1/16. Бумага писчая № 1 Печать офсетная. Гарнитура Таймс. Усл. П. Л. 4,7. Уч.-изд.л. 3,72. Тираж ___ экз.

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104

Отпечатано на полиграфической технике с оригинала
макета учреждения образования «Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины»
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104